Antony Kurniawa/XII-C3/05
Joachim Fidelis/XII-C3/20
Juno Sienjaya/XII-C3/22
Richmond Ryo Widjaja/XII-C3/35

1. Surplus Konsumen:
   Sebuah perusahaan menjual produk dengan fungsi permintaan sebagai berikut:

   $$P = 72 - 2Q - Q^2$$

   Jika jumlah barang yang berhasil terjual mencapai 6 unit, tentukan besar surplus konsumen yang diperoleh apabila harga pasar mengikuti fungsi permintaan tersebut!

   Jawaban:

   $$Q_e = 6$$

   $$P_e = 72 - 2(Q_e) - (Q_e)^2$$

   $$P_e = 72 - 12 - 36$$

   $$P_e = 24$$

   $$Cs = \int_0^{Qe} [P(Q) - P_e] dQ$$

   $$Cs = \int_0^6 [72 - 2Q - Q^2 - 24] dQ$$

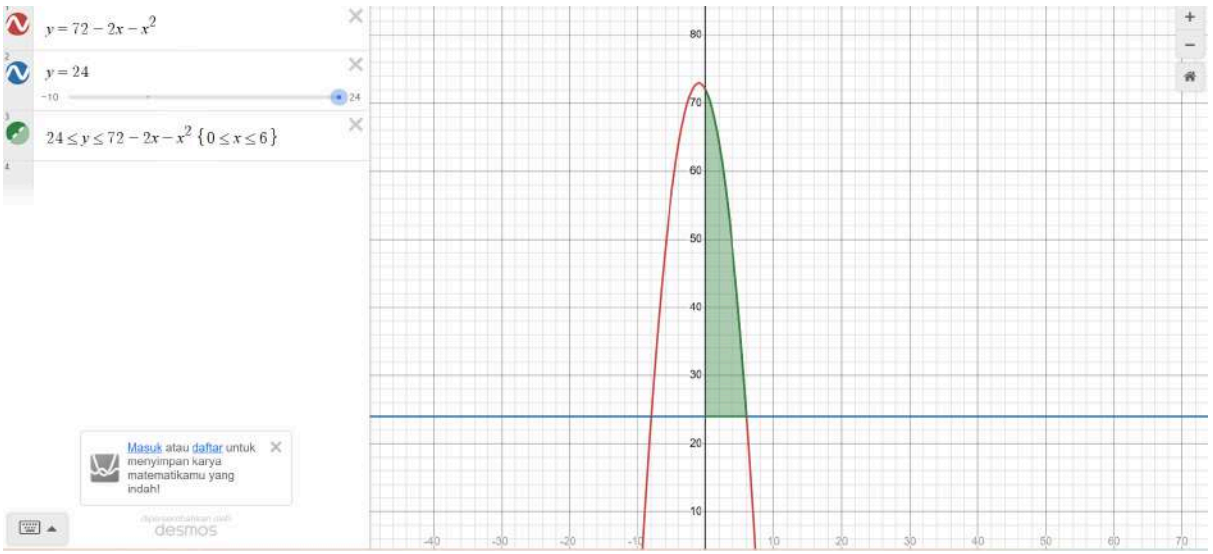
   $$Cs = \int_0^6 [48 - 2Q - Q^2] dQ$$

   $$Cs = \left[48Q - Q^2 - \frac{Q^3}{3}\right]_0^6$$

   $$Cs = \left(48(6) - 6^2 - \frac{6^3}{3}\right)$$

   $$Cs = 288 - 36 - 72$$

   $$Cs = 180$$



2. Surplus Produsen:

Suatu perusahaan memproduksi barang dengan fungsi penawaran:

$$P = 4 + Q^2$$

Ketika harga pasar mencapai 20 dolar per unit, perusahaan mampu menawarkan barang sesuai dengan fungsi penawarannya. Hitunglah besar surplus produsen yang diperoleh perusahaan!

Jawaban:

$$P_e = 20$$

$$20 = 4 + {Q_e}^2$$

$${Q_e}^2 = 20 - 4$$

$${Q_e}^2 = 16$$

$$Q_e = 4$$

$$Ps = \int_0^{Q_e} [P_e - P(Q)]dQ$$

$$Ps = \int_0^4 [20 - (4 + Q^2)]dQ$$

$$Ps = \int_0^4 (16 - Q^2)dQ$$

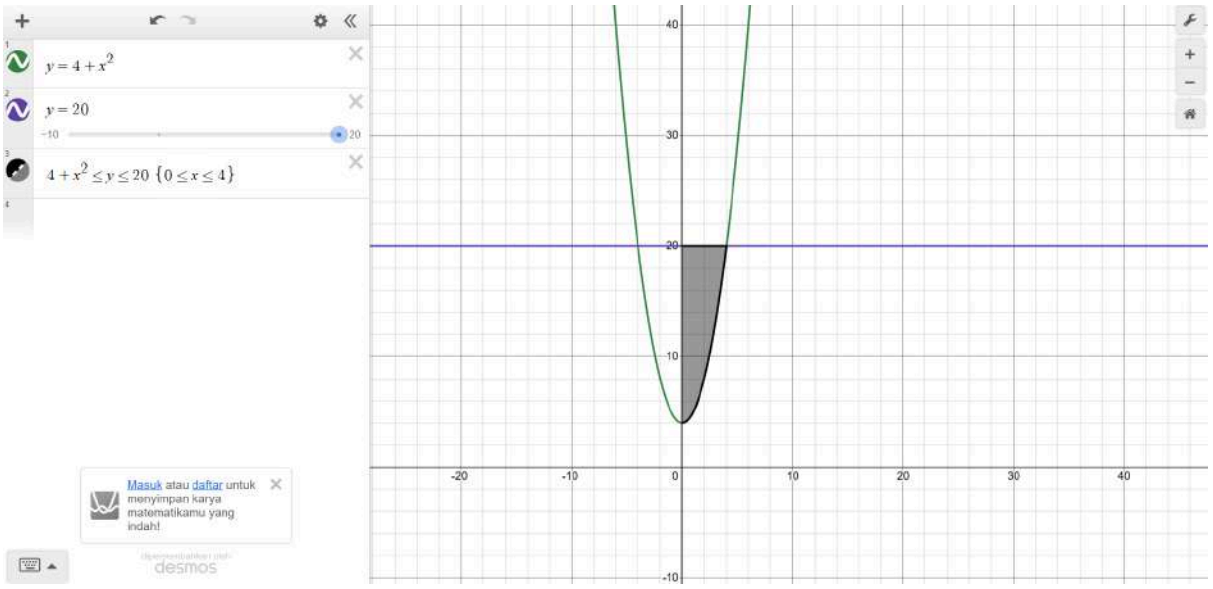
$$Ps = \left[16Q - \frac{Q^3}{3}\right]_0^4$$

$$Ps = \left(16(4) - \frac{4^3}{3}\right)$$

$$Ps = 64 - \frac{64}{3}$$

$$Ps = \frac{192-64}{3}$$

$$Ps = 42,67$$



3. Hitunglah daerah tertutup yang dibatasi oleh:

$y = -x, y = -5x$, dan $y = 3(x + 2)^2 + 2$

Jawaban :

- Garis Pertama (g_1): $y = -x$
- Garis Kedua (g_2): $y = -5x$
- Parabola (P): $y = 3(x + 2)^2 + 2$

(P): $y = 3(x^2 + 4x + 4) + 2$

(P): $y = 3x^2 + 12x + 12 + 2$

(P): $y = 3x^2 + 12x + 14$

- **Titik Potong Garis g_1 dan Garis g_2 (A):**

$g_1 = g_2$

$-x = -5x$

$4x = 0$

$x = 0$

Substitusi nilai x ke persamaan g_1 ($y = -x$):

$y = -(0) = 0$

- Titik Potong A: (0, 0)

- **Titik Potong Garis g_1 dan Parabola P (B):**

$g_1 = P$

$3x^2 + 12x + 14 = -x$

$3x^2 + 13x + 14 = 0$

$(3x + 7)(x + 2) = 0$

1. $3x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -7/3$
2. $x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

Substitusi nilai x ke persamaan g_1 ($y = -x$):

- $x_1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow y_1 = \frac{7}{3} \Rightarrow$ **Titik Potong B_1: $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$**
- $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 2 \Rightarrow$ **Titik Potong B_2: (−2, 2)**

- **Titik Potong Garis g_2 dan Parabola P (C):**

$g_2 = P$

$3x^2 + 12x + 14 = -5x$

$3x^2 + 17x + 14 = 0$

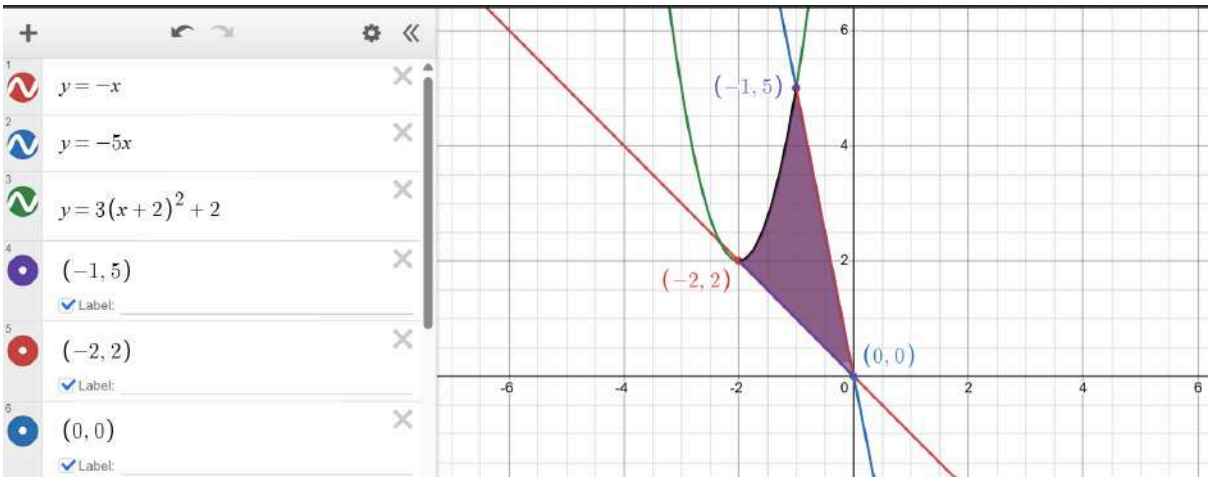
$(3x + 14)(x + 1) = 0$

1. $3x + 14 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{14}{3}$
2. $x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

Substitusi nilai x ke persamaan g_2 ($y = -5x$):

- Untuk $x_1 = -\frac{14}{3} \Rightarrow y_1 = \frac{70}{3} \Rightarrow$ **Titik Potong C_1: $(-\frac{14}{3}, \frac{70}{3})$**
- Untuk $x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 5 \Rightarrow$ **Titik Potong C_2: $(-1, 5)$**

Berdasarkan titik-titik potong yang dihitung, batas-batas interval domain x yang membentuk daerah tertutup adalah dari $x = -2$ hingga $x = 0$.



- Dari $x = -2$ sampai $x = -1$: Dibatasi oleh Parabola P di atas dan Garis g_1 di bawah.
- Dari $x = -1$ sampai $x = 0$: Dibatasi oleh Garis g_2 di atas dan Garis g_1 di bawah.

$L = L_1 + L_2$

$$L = \int_{-2}^{-1} (3x^2 + 13x + 14)\, dx + \int_{-1}^{0} (-4x)\, dx$$

- **Perhitungan Luas Daerah Pertama (L_1)(F(x))**

$$L_1 = \int_{-2}^{-1} (3x^2 + 13x + 14)\, dx$$

$L_1 = \left[x^3 + (\frac{13}{2})x^2 + 14x\right]_{-2}^{-1}$

Evaluasi F(x) pada batas atas x = −1:

$F(-1) = (-1)^3 + (\frac{13}{2})(-1)^2 + 14(-1)$

$F(-1) = -1 + \frac{13}{2} - 14$

$F(-1) = -15 + 6.5 = -8.5 = -\frac{17}{2}$

Evaluasi F(x) pada batas bawah x = −2:

$F(-2) = (-2)^3 + (\frac{13}{2})(-2)^2 + 14(-2)$

$F(-2) = -8 + (\frac{13}{2})(4) - 28$

$F(-2) = -8 + 26 - 28 = -10$

$L_1 = F(-1) - F(-2)$:

$L_1 = (-\frac{17}{2}) - (-10)$

$L_1 = \frac{3}{2}$

- **Perhitungan Luas Daerah Kedua (L_2) (G(x))**

$L_2 = \int_{-1}^{0} (-4x)\, dx$

$L_2 = [-2x^2]_{-1}^{0}$

Evaluasi G(x) pada batas x = 0 dan x = −1:

$G(0) = -2(0)^2 = 0$

$G(-1) = -2(-1)^2 = -2$

$L_2 = G(0) - G(-1)$:

$L_2 = 0 - (-2) = 2$

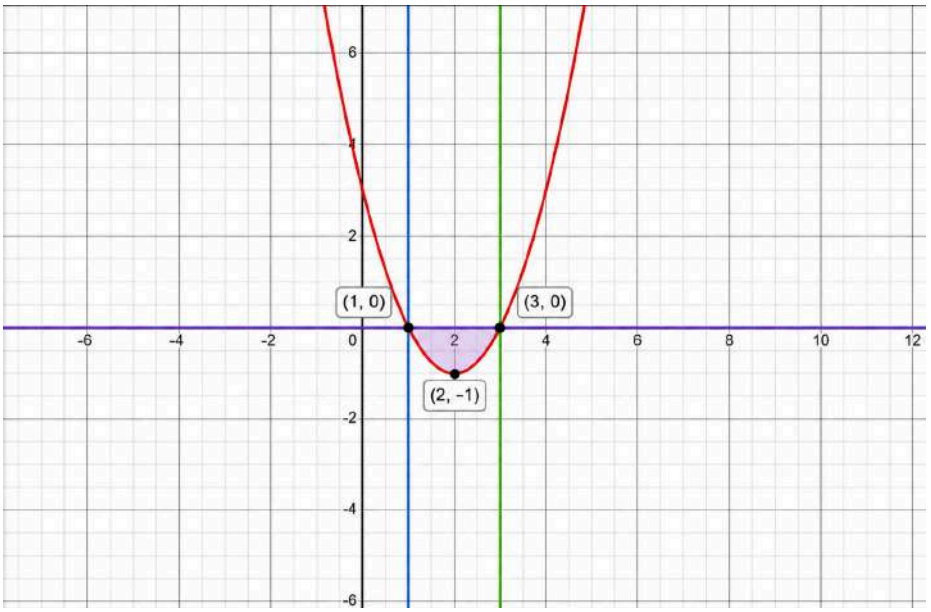
- Luas Bagian I (L_1): $\frac{3}{2}$ satuan luas
- Luas Bagian II (L_2): 2 satuan luas
- Luas Total Daerah Tertutup: $\frac{7}{2}$ satuan luas

4. Seorang arsitek sedang merancang taman berbentuk lengkungan parabola pada sebuah bidang koordinat Kartesius. Batas taman tersebut mengikuti kurva: f(x)= x² - 4x + 3 dan dibatasi oleh sumbu x pada interval x=1 hingga x=3 dan y = 0.

a.) Gambarkan kurva pada bidang koordinat kartesius

b.) Hitung luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu x

a.)



b.)

Cari titik potong:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \; atau \; x = 3$$

rumus Integral luas:

$$L = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx$$

$$L = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

x=3:

$$= \frac{3^3}{3} - 2(3)^2 + 3(3)$$

$$= 9 - 18 + 9 = 0$$

x=1:

$$= \frac{1^3}{3} - 2(1)^2 + 3(1)$$

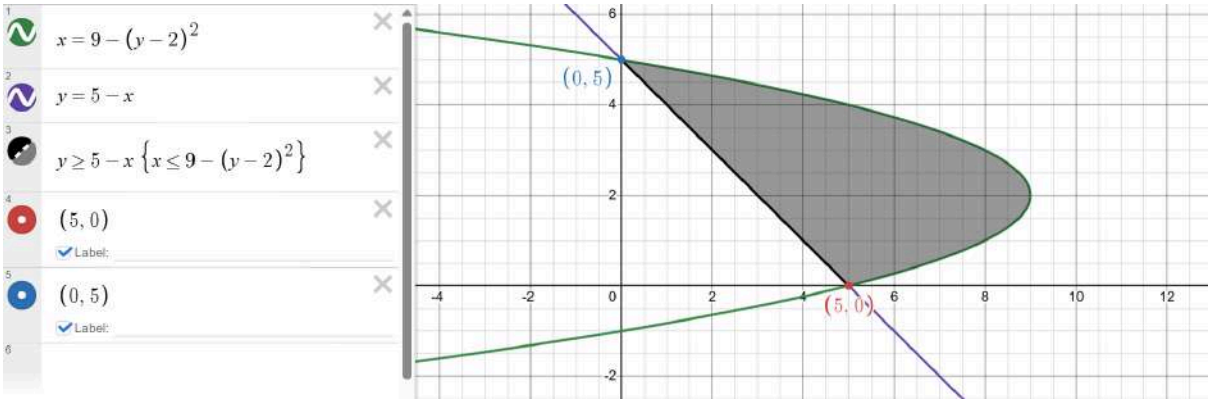
$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$$

Total Luas:

$$L = -\left(0 - \frac{4}{3}\right)$$

$$L = \frac{4}{3} \text{ satuan luas}$$

5. Tentukan besarnya nilai luasan dari daerah arsiran yang diapit oleh dua persamaan garis berikut ini!



Parabola:

- $x = 9 - (y - 2)^2$
- $x = 9 - (y^2 - 4y + 4)$
- $x = 5 + 4y - y^2$

Garis lurus:

- $y = 5 - x$
- $x = 5 - y$

a) Tentukan titik potong:

$9 - (y - 2)^2 = 5 - y$

$9 - (y^2 - 4y + 4) = 5 - y$

$9 - y^2 + 4y - 4 = 5 - y$

$-y^2 + 4y + 5 = 5 - y$

$-y^2 + 5y = 0$

$y(-y + 5) = 0$

- $y_1 = 0$ ➔ $x_1 = 5 - 0 = 5$ ➔ Titik potong: (5, 0)
- $y_2 = 5$ ➔ $x_2 = 5 - 5 = 0$ ➔ Titik potong: (0, 5)

- Luas arsiran

$$L = \int_0^5 ((5 + 4y - y^2) - (5 - y))\, dy$$

$$L = \int_0^5 (5y - y^2)\, dy$$

$F(y) = \int (5y - y^2)\, dy = \frac{5}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3$

Evaluasi Batas Atas (y = 5):

$F(5) = \frac{5}{2}(5)^2 - \frac{1}{3}(5)^3 F(5) = \frac{5}{2}(25) - \frac{1}{3}(125) F(5) = \frac{125}{2} - \frac{125}{3}$

$F(5) = (375 - 250) / 6 = \frac{125}{6}$

Evaluasi Batas Bawah (y = 0):

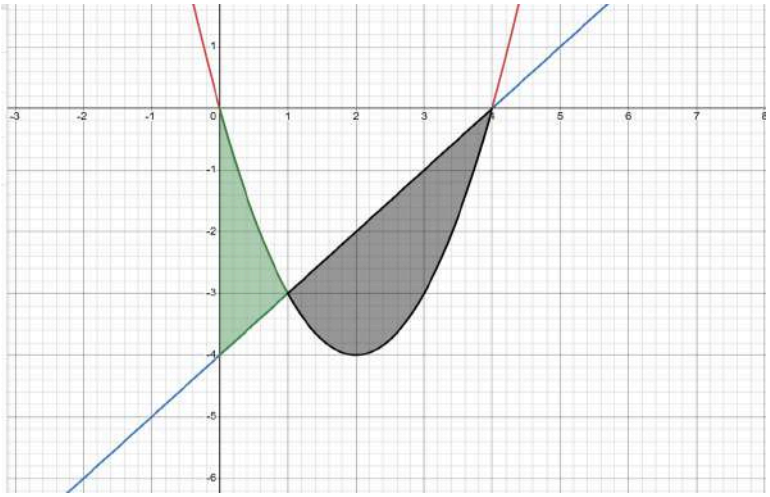
$F(0) = \frac{5}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 = 0$

Luas Total:

$L = F(5) - F(0)$

$L = \frac{125}{6} - 0 = \frac{125}{6}$ satuan luas

6. Tentukan besarnya nilai luasan dari daerah arsiran yang diapit oleh dua persamaan garis berikut ini!



Jawaban :

Persamaan Garis

Dari grafik, garis melalui titik (0, −4) dan (4, 0).

Gradien garis:

$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

$m = (0 - (-4))/(4 - 0)$

$m = 4/4 = 1$

Menggunakan persamaan garis $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$y - (-4) = 1(x - 0)$

$y = x - 4$

Persamaan Parabola

Dari grafik, parabola memiliki titik potong sumbu x di (0, 0) dan (4, 0), serta titik puncak (2, −4).

Bentuk persamaan parabola:

$y = a(x - 0)(x - 4)$

$y = ax(x - 4)$

Substitusi titik (2, −4):

$-4 = a(2)(2 - 4)$

$-4 = -4a$

$a = 1$

$y = x^2 - 4x$

Menentukan titik potong garis dan parabola

$x^2 - 4x = x - 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

$x = 1$ atau $x = 4$

Luas daerah hijau

$$L_1 = \int_0^1 [(x^2 - 4x) - (x - 4)]dx$$

$$L_1 = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)dx$$

$$L_1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right]_0^1$$

$$L_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4$$

$$L_1 = \frac{11}{6}$$

Luas daerah hitam

$$L_2 = \int_1^4 [(x - 4) - (x^2 - 4x)]dx$$

$$L_2 = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx$$

$$L_2 = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4$$

$$L_2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right)$$

$$L_2 = \frac{9}{2}$$

Luasan Total

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = \frac{11}{6} + \frac{9}{2}$$

$$L = \frac{11}{6} + \frac{27}{6}$$

$L = \frac{19}{3}$ satuan luas