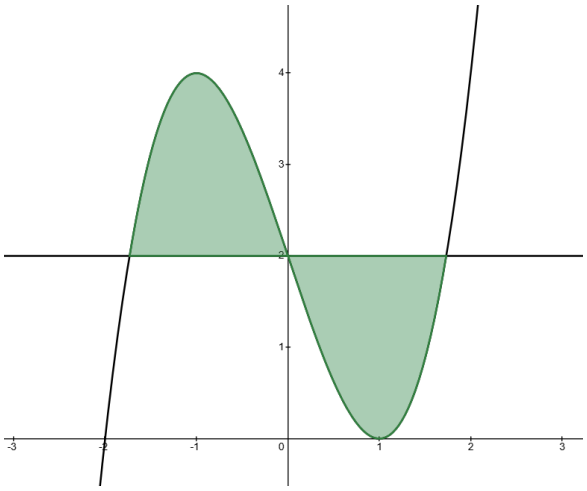
Joshua Leydon C. XII C3/21
Keith K. Ko XII C3/23
Warren Purbowo XII C3/36
W. Wayne Wijaya XII C3/37

SOAL APLIKASI INTEGRAL KELAS XII

1. Andi memiliki sebuah taman dengan bentuk sebagai berikut. Bentuk tersebut diwakili oleh $y = x^3 - 3x + 2$ dan $y = 2$. Tentukan luas daerahnya!



Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Titik Potong Antara Kurva dan Garis

$x^3 - 3x + 2 = 2$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah I ($-\sqrt{3} \le x \le 0$)

$L_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} [(x^3 - 3x + 2) - 2]dx$

$L_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)dx$

$L_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}$

$L_1 = [0] - [\frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(-\sqrt{3})^2]$

$L_1 = [0] - [\frac{1}{4}(9) - \frac{3}{2}(3)]$

$L_1 = [0] - (\frac{9}{4} - \frac{9}{2})$

$L_1 = [0] - (-\frac{9}{4})$

$L_1 = \frac{9}{4}$

Langkah 3: Menghitung Luas Daerah II ($0 \le x \le \sqrt{3}$)

$L_2 = \int_{0}^{\sqrt{3}} [2 - (x^3 - 3x + 2)]\,dx$

$L_2 = \int_{0}^{\sqrt{3}} (3x - x^3)]\,dx$

$L_2 = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{\sqrt{3}}$

$L_2 = \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{3})^4\right] - [0]$

$L_2 = \left[\frac{3}{2}(3) - \frac{1}{4}(9)\right]$

$L_2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4}$

$L_2 = \frac{9}{4}$

Langkah 4: Menghitung Luas Total

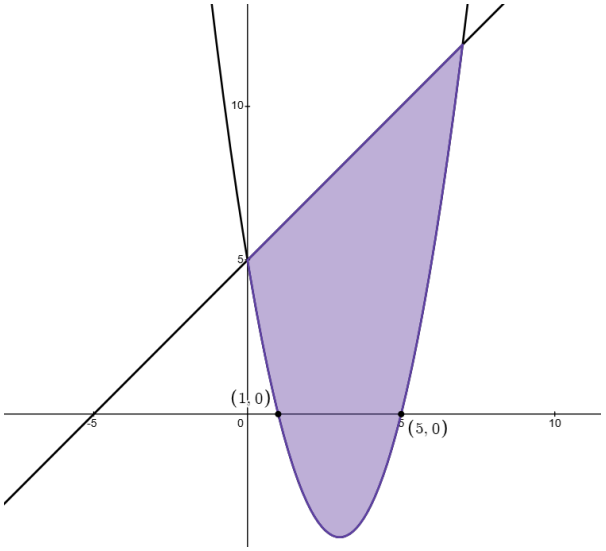
$L = L_1 + L_2$

$L = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$

$L = \frac{18}{4}$

$L = \frac{9}{2}\ satuan\ luas$

2. Tentukan luas daerah yang diarsir berwarna ungu menggunakan aplikasi integral!



Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Persamaan Kurva dan Garis

$y = a(x - 1)(x - 5)$

$5 = a(0 - 1)(0 - 5)$

$5 = 5a$

$a = 1$

$y = (x - 1)(x - 5)$

$y = x^2 - 6x + 5$

$m = \frac{(5-0)}{(0-(-5))} = 1$

$y = x + 5$

Langkah 2: Menentukan Titik Potong Kedua Kurva

$x^2 - 6x + 5 = x + 5$

$x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$

$x = 0,\ x = 7$

Langkah 3: Menghitung Luas Daerah ($0 \le x \le 7$)

$L = \int_0^7 [(x + 5) - (x^2 - 6x + 5)]dx$

$L = \int_0^7 [(7x - x^2)dx$

$L = \left[\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^7$

$L = \left[\frac{7}{2}(7)^2 - \frac{1}{3}(7)^3\right] - \left[\frac{7}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right]$

$L = \left[\frac{7}{2}(49) - \frac{1}{3}(343)\right] - 0$

$L = \frac{343}{2} - \frac{343}{3}$

$L = \frac{1029}{6} - \frac{686}{6}$

$L = \frac{343}{6}$

$L = 57\frac{1}{6}\ satuan\ luas$

3. Seorang petani memiliki lahan yang berbentuk identik dengan luas daerah antara kurva fungsi $y = 6x - x^2$ dan $y = -1$. Lahan tersebut membentang dari titik $x = 0$ sampai titik $x = 6$. Berapakah luas keseluruhan lahan pertanian tersebut?

Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Fungsi Atas dan Bawah

$0 \leq x \leq 6 \rightarrow y_{atas} = 6x - x^2$ dan $y_{bawah} = -1$.

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah ($0 \leq x \leq 6$)

$$L = \int_0^6 [(6x - x^2) - (-1)]dx$$

$$L = \int_0^6 (6x - x^2 + 1)dx$$

$$L = \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^6$$

$$L = \left[3(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 + 6\right] - \left[3(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + 0\right]$$

$$L = \left[3(36) - \frac{1}{3}(216) + 6\right] - [0]$$

$$L = [108 - 72 + 6] - [0]$$

$$L = 42 \; satuan \; luas$$

4. Sebuah lahan memiliki bentuk daerah yang dibatasi oleh kurva parabola $y = (x - 2)(x + 4)$ dan garis lurus $y = 2x + 8$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kedua kurva tersebut!

Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Persamaan dan Titik Potong

$$(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$$
$$x^2 + 2x - 8 = 2x + 8$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x - 4)(x + 4) = 0$$
$$x = -4, \; x = 4$$

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah ($-4 \leq x \leq 4$)

$$L = \int_{-4}^4 [(2x + 8) - (x^2 + 2x - 8)]dx$$

$$L = \int_{-4}^4 (16 - x^2)dx$$

$$L = \left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^4$$

$$L = \left[16(4) - \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[16(-4) - \frac{1}{3}(-4)^3\right]$$

$$L = (64 - \frac{64}{3}) - (-64 + \frac{64}{3})$$

$$L = 64 - \frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3}$$

$$L = 128 - \frac{128}{3}$$

$$L = \frac{384}{3} - \frac{128}{3}$$

$$L = \frac{256}{3}$$

$$L = 85\frac{1}{3} \; satuan \; luas$$

5. Sebuah perusahaan menjual produk elektronik dengan fungsi permintaan $P = 100 - 2Q$. Diketahui bahwa harga keseimbangan pasar adalah Rp40.000 per unit. Jika harga dinyatakan dalam ribuan rupiah, tentukan besar surplus konsumen!

Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Kuantitas Keseimbangan (Q_e)

$P_e = 40$

$40 = 100 - 2Q_e$

$2Q_e = 100 - 40$

$2Q_e = 60$

$Q_e = 30$ unit

Langkah 2: Menghitung Surplus Konsumen (C_s)

$$C_s = \int_0^{30} [(100 - 2Q) - 40]dQ$$

$$C_s = \int_0^{30} (60 - 2Q)dQ$$

$$C_s = [60Q - Q^2]_0^{30}$$

$$C_s = \left[60(30) - (30)^2\right] - \left[60(0) - (0)^2\right]$$

$$C_s = (800 - 900) - 0$$

$$C_s = 900\ (dalam\ ribuan\ rupiah)$$

Langkah 3: Konversi ke Nilai Rupiah

Surplus Konsumen = 900 × Rp1.000

Surplus Konsumen = Rp900.000,-

6. Sebuah perusahaan memproduksi dan menjual suatu barang dengan fungsi penawaran $P = Q^2 + 4Q + 10$ (dalam ratus ribu rupiah). Apabila jumlah barang yang terjual pada kondisi keseimbangan pasar adalah 6 unit, tentukan besar surplus produsennya!

Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Harga Keseimbangan (P_e)

$Q_e = 6$

$P_e = (6)^2 + 4(6) + 10$

$P_e = 36 + 24 + 10$

$P_e = 70$ (dalam ratus ribuan rupiah)

Langkah 2: Menghitung Surplus Produsen (P_s)

$$P_s = (P_e \cdot Q_e) - \int_0^6 (Q^2 + 4Q + 10)dQ$$

$$P_s = (70 \cdot 6) - \left[\frac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 + 10Q\right]_0^6$$

$$P_s = 420 - \left[\frac{1}{3}(216) + 2(36) + 60\right]$$

$$P_s = 420 - (72 + 72 + 60)$$

$$P_s = 420 - 204$$

$$P_s = 216\ (dalam\ ratus\ ribuan\ rupiah)$$

Langkah 3: Konversi ke Nilai Rupiah

Surplus Produsen = 216 × Rp100.000

Surplus Produsen = Rp21.600.000,-