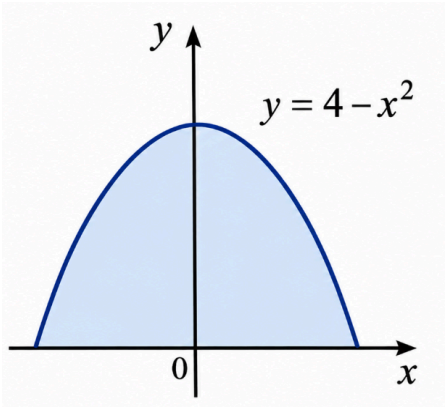
SOAL TERAPAN INTEGRAL

- Calista Angelina Dewi Setiawan XII–C3/07
- Lovely Lavinza Lukito XII–C3/25
- Nikita Clarissa Winata XII–C3/30
- Registhira Marchsya Callysta XII–C3/34

1. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut!



Jawaban:

(langkah 1: menentukan titik potong)

Karena kurva memotong sumbu x, maka y = 0

$$4 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Jadi, diperoleh titik potong (–2 , 0) dan (2 , 0).

Batas integralnya adalah x = –2 sampai x = 2.

(langkah 2: menentukan luas menggunakan integral)

Rumus:

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

Substitusikan fungsi dan batasnya:

$$L = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

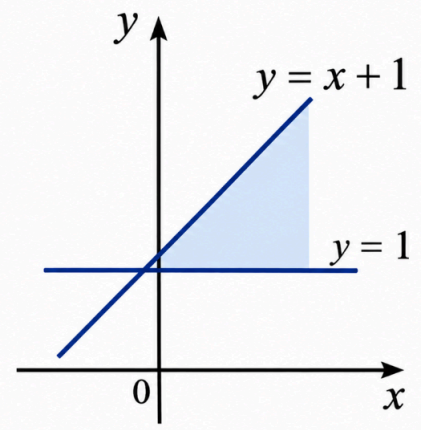
$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= \frac{32}{3} \text{ satuan luas}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\frac{32}{3}$ satuan luas.

2. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut!



Jawaban:

(langkah 1: menentukan titik potong kedua garis)

Samakan kedua persamaan:

$$x + 1 = 1$$

$$x = 0$$

Substitusikan x = 0 ke persamaan y = 1.

Jadi, titik potong kedua garis adalah (0 , 1).

Batas integralnya adalah x = 0 sampai x = 1.

(langkah 2: menentukan fungsi atas dan fungsi bawah)

Diketahui:

Fungsi atas: $f(x) = x + 1$

Fungsi bawah: $g(x) = 1$

Rumus luas antara dua kurva:

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

(langkah 3: menghitung integral)

$$L = \int_0^1 [(x + 1) - 1]dx$$

$$L = \int_0^1 x dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ satuan luas}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 0,5 satuan luas.

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 1.

   Jawaban:

   (langkah 1: menentukan titik potong dengan sumbu x)

   Karena y = 0 (sumbu x), maka:

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

   Jadi, titik potong kurva dengan sumbu x adalah (0 , 0).

   Batas integralnya adalah x = 0 sampai x = 1.

   (langkah 2: menentukan luas daerah menggunakan integral)

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ satuan luas}$$

   Jadi, luas daerah tersebut adalah $\frac{1}{3}$ satuan luas.

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = 6 – 2x, sumbu x, garis x = 0, dan garis x = 3.

   Jawaban:

   (langkah 1: menentukan titik potong dengan sumbu x)

   Karena y = 0 (sumbu x), maka:

$$\begin{aligned} 6 - 2x &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (3 , 0).

   (langkah 2: menentukan titik potong dengan sumbu y) (dalam soal ini sebenarnya tidak wajib dicari, namun dapat membantu dalam menggambar grafik)

   Karena x = 0 (sumbu y), maka:

$$\begin{aligned} y &= 6 - 2\,(0) \\ y &= 6 \end{aligned}$$

   Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah (0 , 6).

   (langkah 3: menghitung luas daerah menggunakan integral)

   Batas integralnya adalah x = 0 sampai x = 3.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 (6 - 2x)\,dx \\ &= \left[6x - x^2\right]_0^3 \\ &= (6(3) - 3^2) - (6(0) - 0^2) \\ &= 18 - 9 \\ &= 9 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

   Jadi, luas daerah tersebut adalah 9 satuan luas.

5. Pada pasar suatu barang, fungsi permintaan dan penawaran diberikan oleh:

   P = 100 – 2Q (permintaan)

   P = 20 + Q (penawaran)

   Hitunglah surplus produsen.

   Jawaban:

   (langkah 1: menentukan titik keseimbangan pasar)

   catatan: titik keseimbangan terjadi ketika permintaan sama dengan penawaran.

$$\begin{aligned} P_d &= P_s \\ 100 - 2Q &= 20 + Q \\ 100 - 20 &= Q + 2Q \\ 80 &= 3Q \\ Q &= \frac{80}{3} = Qe \end{aligned}$$

   (langkah 2: menentukan harga keseimbangan)

   Substitusikan nilai Q_e ke fungsi penawaran:

$$\begin{aligned} P_s &= 20 + \frac{80}{3} \\ &= \frac{140}{3} = P_e \end{aligned}$$

   Jadi, titik keseimbangan pasar adalah:

$$(Q_e , P_e) = \left(\frac{80}{3}, \frac{140}{3}\right)$$

   (langkah 3: menghitung surplus produsen)

   Rumus:

$$Ps = \int_0^{Q_e} [P_e - P_s] dQ$$

   substitusikan nilai yang diketahui:

$$Ps = \int_0^{80/3} \left[\frac{140}{3} - (20 + Q)\right] dQ$$

$$= \int_0^{80/3} \left(\frac{80}{3} - Q\right) dQ$$

$$= \left[\frac{80}{3}Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^{80/3}$$

$$= \frac{80}{3}\left(\frac{80}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{80}{3}\right)^2$$

$$= \frac{6400}{9} - \frac{3200}{9}$$

$$= \frac{3200}{9} \text{ satuan uang}$$

Jadi, surplus produsen adalah sekitar $\frac{3200}{9}$ satuan uang.

6. Pada pasar suatu barang, fungsi permintaan dan penawaran diberikan oleh:

   P = 120 – Q (permintaan)

   P = 20 + Q (penawaran)

   Hitunglah surplus konsumen.

   Jawaban:

   (langkah 1: menentukan titik keseimbangan pasar)

   Samakan fungsi permintaan dan penawaran:

$$\begin{aligned} 120 - Q &= 20 + Q \\ 120 - 20 &= Q + Q \\ 100 &= 2Q \\ Q &= 50 = Q_e \end{aligned}$$

   (langkah 2: menentukan harga keseimbangan)

   Substitusikan $Q_e = 50$ ke fungsi permintaan:

$$\begin{aligned} P_s &= 120 - 50 \\ &= 70 = P_e \end{aligned}$$

   Jadi, titik keseimbangan pasar adalah:

$$(Q_e , P_e) = (50 , 70)$$

   (langkah 3: menghitung surplus konsumen)

   Rumus:

$$Cs = \int_0^{Q_e} [P_d - P_e] dQ$$

   Substitusikan nilai yang diketahui:

$$\begin{aligned} Cs &= \int_0^{50} [(120 - Q) - 70] dQ \\ &= \int_0^{50} (50 - Q) dQ \\ &= \left[50Q - \frac{Q^2}{2} \right]_0^{50} \end{aligned}$$

$$= 50(50) - \frac{50^2}{2}$$

$$= 2500 - 1250$$

$$= 1250 \text{ satuan uang}$$

Jadi, surplus konsumen adalah 1.250 satuan uang.