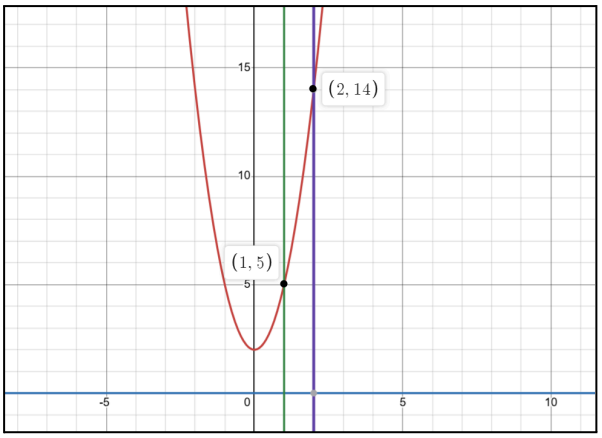
Soal Aplikasi Integral

Soal Luas Daerah

1. Soal Dengan Gambar



Perhatikan gambar! Daerah yang diarsir dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 + 2$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 2$. Hitunglah luas daerah yang diarsir!

Gambar: parabola $y = 3x^2 + 2$ (titik (1,5) dan (2,14)), arsiran di bawah kurva di atas sumbu X antara $x = 1$ dan $x = 2$.

Pembahasan:

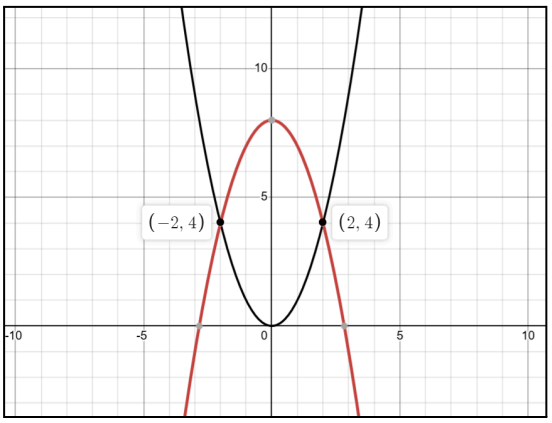
$L = \int_1^2 (3x^2 + 2)\, dx$

$= [x^3 + 2x]_1^2$

$= (8 + 4) - (1 + 2)$

$= 9$ satuan luas

2. Soal Dengan Gambar



Perhatikan gambar! Daerah yang diarsir dibatasi oleh dua parabola, $y = x^2$ dan $y = 8 - x^2$. Hitunglah luas daerah yang diarsir!

Gambar: parabola $y = x^2$ (terbuka ke atas) dan $y = 8 - x^2$ (terbuka ke bawah) yang berpotongan di $(-2, 4)$ dan $(2, 4)$. Arsiran berada di antara kedua kurva.

Pembahasan:

Titik potong: $x^2 = 8 - x^2 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x = -2$ atau $x = 2$

$L = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - x^2)\, dx$

$= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx$

$= [8x - \frac{2}{3}x^3]_{-2}^{2}$

$= (16 - 16/3) - (-16 + 16/3)$

$= 64/3$ satuan luas ($\approx 21{,}33$)

3. Soal Tanpa Gambar

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 6x + 8$ dan sumbu X!

Pembahasan:

Titik potong sumbu X: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \rightarrow x = 2$ atau $x = 4$

Pada $2 < x < 4$ kurva berada di bawah sumbu X, sehingga:

$L = -\int_{2}^{4} (x^2 - 6x + 8)\, dx$

$= -[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x]_{2}^{4}$

$= -(16/3 - 20/3)$

$= 4/3$ satuan luas ($\approx 1{,}33$)

4. Soal Tanpa Gambar

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$ dan garis $y = 2x - 1$!

Pembahasan:

Titik potong: $x^2 - 4 = 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$ atau $x = 3$

$L = \int_{-1}^{3} (2x - 1 - (x^2 - 4))\, dx$

$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx$

$= [-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x]_{-1}^{3}$

$= 9 - (-5/3)$

$= 32/3$ satuan luas ($\approx 10{,}67$)

5. Soal Tanpa Gambar

   Fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 40 - Q^2$ dan fungsi penawarannya adalah $P = 2Q + 25$, dengan P dalam ribu rupiah dan Q dalam unit. Tentukan surplus konsumen pada saat pasar mencapai keseimbangan!

   Pembahasan:

   Titik keseimbangan: $40 - Q^2 = 2Q + 25 \rightarrow Q^2 + 2Q - 15 = 0 \rightarrow (Q + 5)(Q - 3) = 0 \rightarrow Q = 3$ ($Q = -5$ ditolak)

   $P = 2(3) + 25 = 31 \rightarrow$ titik keseimbangan (3, 31)

   $SK = \int_0^3 (40 - Q^2)\, dQ - (3 \times 31)$

   $= [40Q - \frac{1}{3}Q^3]_0^3 - 93$

   $= (120 - 9) - 93$

   $= 18$ (ribu rupiah, yaitu Rp18.000)

6. Soal Tanpa Gambar

   Fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 40 - 4Q$ dan fungsi penawarannya adalah $P = 2Q^2 + 10$, dengan P dalam ribu rupiah dan Q dalam unit. Tentukan surplus produsen pada saat pasar mencapai keseimbangan!

   Pembahasan:

   Titik keseimbangan: $40 - 4Q = 2Q^2 + 10 \rightarrow 2Q^2 + 4Q - 30 = 0 \rightarrow Q^2 + 2Q - 15 = 0 \rightarrow (Q + 5)(Q - 3) = 0 \rightarrow Q = 3$ ($Q = -5$ ditolak)

   $P = 40 - 4(3) = 28 \rightarrow$ titik keseimbangan (3, 28)

   $SP = (3 \times 28) - \int_0^3 (2Q^2 + 10)\, dQ$

   $= 84 - [\frac{2}{3}Q^3 + 10Q]_0^3$

   $= 84 - (18 + 30)$

   $= 36$ (ribu rupiah, yaitu Rp36.000)