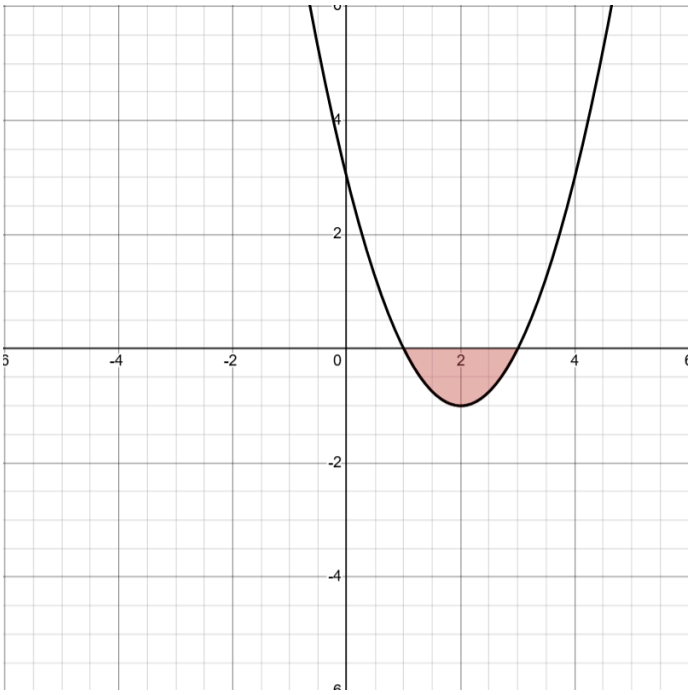
SOAL APLIKASI INTEGRAL

1. Tentukan luas daerah yang diarsir berikut yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 4x + 3$ dan garis $y = 0$.



Pembahasan:

Mencari Batas-batas Integral

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 1$ atau $x = 3$

Mencari Luas Daerah

$$L = -\int_1^3 x^2 - 4x + 3 \, dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= -(9 - 18 + 9) + \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)$$

$$= 0 + \frac{4}{3}$$

$L = \frac{4}{3}$ **satuan luas**

2. Jika diketahui:

   Fungsi permintaan: $P(x) = 100 - 2x - 0,125x^2$

   Fungsi penawaran: $P(x) = 67 + 2x + 0.125x^2$

   Dengan x menyatakan jumlah barang yang diproduksi dan dijual (dalam satuan unit), sedangkan P menyatakan harga barang (dalam ribuan rupiah per unit). Tentukan besar surplus konsumen (C_s) ketika pasar berada dalam kondisi equilibrium!

   Pembahasan:

   Mencari Titik Ekuilibrium

   $100 - 2x - 0,125x^2 = 67 + 2x + 0.125x^2$

   $33 - 4x - 0,25x^2 = 0$

   $x^2 + 16x - 132 = 0$

   $(x + 22)(x - 6) = 0$

   $x = 6$

   $P_e = 100 - 2(6) - 0,125(6)^2$

   $= 100 - 12 - 4,5$

   $P_e = 83,5$

   Menghitung Surplus Konsumen (C_s)

   $C_s = \int_0^{x_e} [P_d(x) - P_e]dx$

   $= \int_0^6 (100 - 2x - 0,125x^2 - 83,5)dx$

   $= \left[16,5x - x^2 - \frac{0,125}{3}x^3\right]_0^6$

   $= 99 - 36 - 9$

   $C_s = 54$ **ribu rupiah**

3. Jika diketahui:

   $f(x) = 20 - x^2$

   $g(x) = x^2 - 4x + 4$

   Hitung luas daerah tertutup yang terbentuk!

   Pembahasan:

   Mencari Batas-batas Integral

   $20 - x^2 = x^2 - 4x + 4$

   $2x^2 - 4x - 16 = 0$

   $x^2 - 2x - 8 = 0$

   $(x + 2)(x - 4) = 0$

   $x = -2$ atau $x = 4$

   Cek: $x = 0$

   $f(0) = 20 - 0^2 = 20$

   $g(0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$

   $\Rightarrow f(x)$ di atas $g(x)$

   Mencari Luas Daerah

   $$L = \int_{-2}^{4} f(x) - g(x)\, dx$$

   $$= \int_{-2}^{4} 20 - x^2 - (x^2 - 4x + 4)\, dx$$

   $$= \int_{-2}^{4} 16 - 2x^2 + 4x\, dx$$

   $$= \left[16x - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{4}$$

   $$= (64 - \frac{128}{3} + 32) - (-32 + \frac{16}{3} + 8)$$

   $$= 96 - \frac{128}{3} + 24 - \frac{16}{3}$$

   $$= 120 - 48$$

   $L = 72$ **satuan luas**

4. Fungsi penawaran suatu komoditas diekspresikan dengan persamaan $P(Q) = \frac{40Q}{Q+10} + 10$, sedangkan fungsi permintaannya adalah $P(Q) = 50 - 2Q$. Hitunglah besar surplus produsen (P_s) saat terjadi keseimbangan pasar!

Pembahasan:

Mencari Titik Ekuilibrium

$\frac{40Q}{Q+10} + 10 = 50 - 2Q$

$40Q = (40 - 2Q)(Q + 10)$

$40Q = 40Q + 400 - 2Q^2 - 20Q$

$2Q^2 + 20Q - 400 = 0$

$(2Q - 20)(Q + 20) = 0$

$Q_e = 10$ atau $Q_e = -20$ (TM)

$P_e = 50 - 2Q_e$

$= 50 - 2 \cdot 10$

$P_e = 30$

Menghitung Surplus Produsen (P_s)

$P_s = \int_0^{Q_e} (P_e - P)\, dQ$

$= \int_0^{10} (30 - (\frac{40Q}{Q+10} + 10))\, dQ$

$= \int_0^{10} (20 - (40 - \frac{400}{Q+10}))\, dQ$

$= \int_0^{10} (-20 + \frac{400}{Q+10})\, dQ$

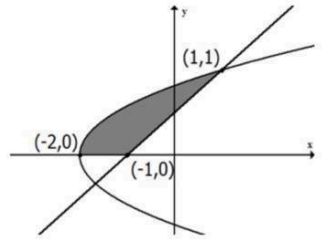
$= [-20Q + 400ln(Q + 10)]_0^{10}$

$= -200 + 400ln(20) - (0 + 400ln(10))$

$= -200 + 400ln(\frac{20}{10})$

$P_s = 400ln(2) - 200$

5. Hitung luas daerah yang diarsir pada gambar berikut!



Pembahasan:

Mencari Persamaan Kurva

Misalkan rumus persamaan kuadrat adalah $x = a(y - y_p)^2 + x_p$

$(x_p, y_p) = (-2, 0) \Rightarrow x = ay^2 - 2$

$(x_1, y_1) = (1, 1) \quad \Rightarrow 1 = a - 2 \quad \Rightarrow a = 3$

Maka, persamaan kurva tersebut adalah $x = 3y^2 - 2$.

Mencari Persamaan Garis

Diketahui: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ dan $(x_2, y_2) = (-1, 0)$.

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x-1}{-1-1}$

$-2y + 2 = -x + 1$

$x = 2y - 1$

Maka, persamaan garis tersebut adalah $x = 2y - 1$.

Mencari Luas Daerah

Menurut gambar, persamaan garis ada di atas persamaan kurva.

$L = \int_0^1 2y - 1 - (3y^2 - 2)\, dy$

$= \int_0^1 -3y^2 + 2y + 1\, dy$

$= \left[-y^3 + y^2 + y\right]_0^1$

$= -1 + 1 + 1 - 0$

$L = 1$ **satuan luas**

6. Hitung luas daerah yang dibatasi kurva $x = -y^2 + 6y - 5$ dan sumbu y!

Pembahasan:

Mencari Batas-batas Integral

$-y^2 + 6y - 5 = 0$

$y^2 - 6y + 5 = 0$

$(y - 1)(y - 5) = 0$

$y = 1$ atau $y = 5$

Mencari Luas Daerah

$L = \int_1^5 -y^2 + 6y - 5\, dy$

$= \left[-\frac{1}{3}y^3 + 3y^2 - 5y\right]_1^5$

$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$

$= -\frac{125}{3} + 50 + \frac{1}{3} + 2$

$= -\frac{124}{3} + 52$

$L = 10\frac{2}{3}$ **satuan luas**

Anggota:

Alexander Raphael Kosasih/XII C3/02

Christopher Xavier Thionarto/XII C3/09

I Made Kenzo Aryakrishna Laksana/XII C3/15

Michael Asher Condrowibowo/XII C3/28