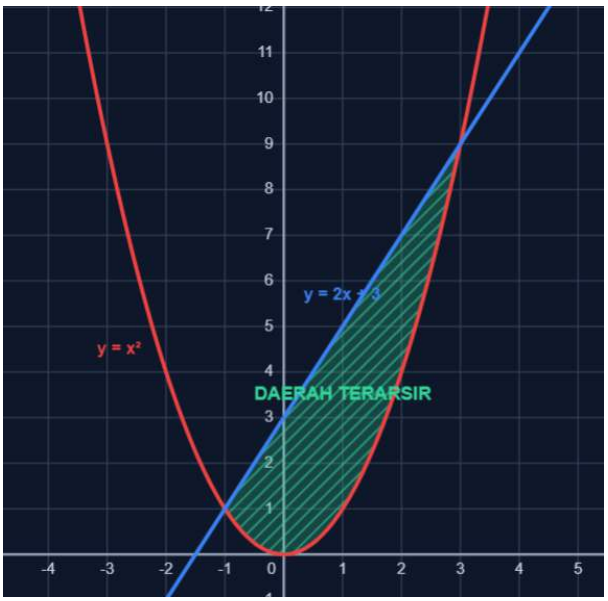
Soal dan Jawaban Aplikasi Integral Matematika Wajib

Anggota Kelompok

1. Blessya Rehata XII-C3/06
2. Chelsy Ivana Wu XII-C3/08
3. Fiori Sartika XII-C3/12
4. Owen Leonardo Effendi XII-C3/31

1. Tentukan luas daerah yang diarsir!

persamaan garis $y = x^2$ dan $y = 2x + 3$.



Jawab:

Mencari titik potong

$x^2 = 2x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3,\ x = -1$

Menghitung luas karena titik potong sebagai batas

$$L = \int_{-1}^{3} (2x + 3) - (x^2)\, dx$$

$$L = \int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2\, dx$$

$$L = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$

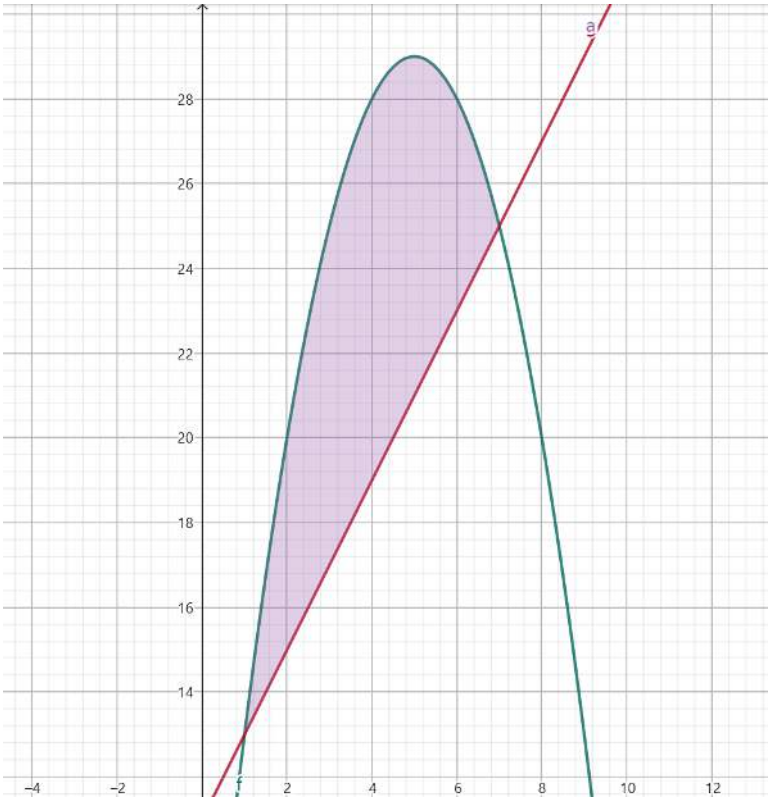
$$= \left((3)^2 + 3(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left((-1)^2 + 3(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right)$$

$$= (9) - \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$= 9 + \frac{5}{3}$$

$= 10\frac{2}{3}$ satuan luas

2. Tentukan luas daerah yang diarsir!



Jawab:

Menentukan persamaan parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

Dari titik (0,4) pada parabola

$4 = a(0)^2 + b(0) + c$

$c = 4$ …(i)

Dari titik (2,20) pada parabola

$20 = a(2)^2 + b(2) + c$

$20 = 4a + 2b + c$ …(ii)

Dari titik (4,28) pada parabola

$28 = a(4)^2 + b(4) + c$

$28 = 16a + 4b + c$ …(iii)

Substitusi (i) ke (ii) dan (iii)

$20 = 4a + 2b + 4$ …(ii)

$16 = 4a + 2b$ …(iv)

$28 = 16a + 4b + 4$ …(iii)

$24 = 16a + 4b$ …(v)

Eliminasi (iv) dan (v)

$4a + 2b = 16$ …(iv)

$8a + 2b = 12$ …(v)

———————— -

$-4a = 4$

$a = -1 \qquad b = 10$

Persamaan parabola :

$$f(x) = -x^2 + 10x + 4$$

Menentukan persamaan garis

$m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$

Dari titik (0,11) dan (2,15) pada garis

$m = \frac{15-11}{2-0} = 2$

$y = mx + c$

$11 = (2)(0) + c$

$11 = c$

Persamaan garis :

$y = g(x) = 2x + 11$

Menghitung luas

$$L = \int_1^7 [(-x^2 + 10x + 4) - (2x + 11)]dx$$

$$L = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x\right]_1^7$$

$$= \left[-\frac{(7)^3}{3} + 4(7)^2 - 7(7)\right] - \left[-\frac{(1)^3}{3} + 4(1)^2 - 7(1)\right]$$

$$= \left[-\frac{343}{3} + 147\right] - \left[-\frac{1}{3} - 3\right]$$

$$= \frac{108}{3}$$

$$= 36 \ satuan\ luas$$

3. Sebuah taman memiliki batas atas berupa kurva $y = 12 - x^2$ dan batas bawah berupa garis $y = 2x$. Kedua kurva tersebut berpotongan di dua titik. Tentukan luas daerah taman yang berada di antara kedua kurva tersebut.

Jawaban

$12 - x^2 = 2x$

$x^2 + 2x - 12 = 0$

$9 - x^2 = 3x$

$x^2 + 3x - 9 = 0$

$8 - x^2 = 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4 dan x = 2$

$L = \int_{-4}^{2} (8 - x^2 - 2x) dx$

$L = \left[8x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-4}^{2}$

$L = \frac{20}{3} - \left(-\frac{80}{3} \right)$

$L = \frac{100}{3}$ satuan luas

4. Sebuah kolam berbentuk tidak beraturan dirancang dengan batas atas berupa kurva $y = 16 - x^2$ dan batas bawah berupa sumbu-X. Kolam hanya dibangun pada interval $x = -4$ hingga $x = 4$. Di bagian tengah kolam, terdapat sebuah pulau kecil yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan sumbu-X pada interval $x = -2$ hingga $x = 2$.

Tentukan luas permukaan air kolam tanpa menghitung luas pulau tersebut.

Jawaban:

$$L_1 = \int_{-4}^{4} (16 - x^2) dx$$

$$L_1 = \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{4}$$

$$L_1 = \frac{256}{3}$$

$$L_2 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx$$

$$L_2 = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$

$$L_2 = \frac{32}{3}$$

$$L = L_1 - L_2$$

$$L = \frac{256}{3} - \frac{32}{3}$$

Jawaban: $L = \frac{224}{3}$ satuan luas

5. Diketahui pasar suatu barang memiliki fungsi penawaran $P_s(Q) = Q^2 + 2Q + 4$ dan fungsi permintaan $P_d(Q) = 40 - Q$. Hitung surplus produsen pada keseimbangan pasar!

$40 - Q = Q^2 + 2Q + 4$

$Q^2 + 3Q - 36 = 0$

$Q^* = \frac{-3+\sqrt{9+144}}{2} = \frac{-3+\sqrt{153}}{2} \approx 4{,}685$

$P^* = 40 - Q^* \approx 40 - 4{,}685 = 35{,}315$

$PS = \int_0^{Q^*} [P^* - P_s(Q)]\, dQ$

$PS = \int_0^{Q^*} \left[P^* - (Q^2 + 2Q + 4)\right] dQ$

$PS = \int_0^{Q^*} \left[(P^* - 4) - 2Q - Q^2\right] dQ$

$PS = \left[(P^* - 4)Q - Q^2 - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^{Q^*}$

$PS = (P^* - 4)Q^* - (Q^*)^2 - \frac{1}{3}(Q^*)^3$

$(P^* - 4)Q^* \approx 31{,}315 \times 4{,}685 \approx 146{,}71$

$(Q^*)^2 \approx 4{,}685^2 \approx 21{,}95$

$\frac{1}{3}(Q^*)^3 \approx \frac{1}{3} \times 4{,}685^3 \approx 34{,}28$

$PS \approx 146{,}71 - 21{,}95 - 34{,}28 \approx 90{,}48$

6. Diketahui pasar suatu barang memiliki fungsi permintaan $P_d(Q) = 50 - Q^2$ dan fungsi penawaran $P_s(Q) = 10 + 2Q$. Hitunglah surplus konsumen pada keseimbangan pasar!

$50 - Q^2 = 10 + 2Q$

$Q^2 + 2Q - 40 = 0$

$Q^* = \frac{-2+\sqrt{4+160}}{2} = \frac{-2+\sqrt{164}}{2} = -1 + \sqrt{41} \approx 5{,}403$

$P^* = 10 + 2Q^* \approx 10 + 2(5{,}403) = 20{,}806$

$$CS = \int_0^{Q^*} [P_d(Q) - P^*]\, dQ$$

$$CS = \int_0^{Q^*} \left[(50 - Q^2) - P^*\right] dQ$$

$$CS = \int_0^{Q^*} \left[(50 - P^*) - Q^2\right] dQ$$

$$CS = \left[(50 - P^*)Q - \tfrac{1}{3}Q^3\right]_0^{Q^*}$$

$$CS = (50 - P^*)Q^* - \tfrac{1}{3}(Q^*)^3$$

$$(50 - P^*)Q^* \approx 29{,}194 \times 5{,}403 \approx 157{,}74$$

$$\tfrac{1}{3}(Q^*)^3 \approx \tfrac{1}{3} \times 5{,}403^3 \approx 52{,}58$$

$$CS \approx 157{,}74 - 52{,}58 \approx 105{,}16$$